Die elementare Differential- und Integralrechnung sind eigentlich normaler Bestandteil der Schulmathematik. Die Erfahrung hat jedoch gelehrt, dass die mathematischen Vorkenntnisse der Studierenden des ersten Semesters in dieser Hinsicht stark differieren, sodass Dinge, die dem einen völlig selbstverständlich sind, dem anderen zunächst als *lähmende* Barriere erscheinen. Es sollen deshalb in diesem einführenden Kapitel die wichtigsten Elemente der Differential- und Integralrechnung zusammengestellt werden, die im Folgenden benötigt werden, um mit der *Theoretische Physik* beginnen zu können. Natürlich kann dies nicht die präzise Darstellung der Mathematik-Vorlesung ersetzen, ist also an dieser Stelle nur als *Notprogramm* zu verstehen. Der Leser, der mit der Differential- und Integralrechnung aus dem Schulunterricht bereits vertraut ist, kann die Abschn. 1.1 und 1.2 entweder als *testende* Wiederholung ansehen oder sie direkt überspringen.

1.1 Elemente der Differentialrechnung

1.1.1 Zahlenmengen

Man definiert die folgenden Zahlentypen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} && \textbf{natürliche Zahlen}\\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} && \textbf{ganze Zahlen}\\
\mathbb{Q} &= \left\{x;\ x = \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\} && \textbf{rationale Zahlen}\\
\mathbb{R} &= \{x;\ \text{kontinuierliche Zahlengerade}\} && \textbf{reelle Zahlen}\ .
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\ .$$

Der Körper der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ wird erst später in Abschn. 2.3.5 eingeführt und besprochen. In den hier genannten Zahlenmengen sind die Verknüpfungen *Addition* und *Multiplikation* in bekannter Weise definiert. Wir erinnern deshalb nur kurz an den Prozess des **Potenzierens**. Für eine beliebige reelle Zahl a ist die n-te Potenz wie folgt erklärt:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \qquad n \in \mathbb{N}\ . \tag{1.1}$$

Es gelten die **Regeln**:

1.

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n\text{-mal}} = a^n \cdot b^n \tag{1.2}$$

2.

$$a^k \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a^{k+n} \tag{1.3}$$

3.

$$(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{k\text{-mal}} = a^{n \cdot k} \,. \tag{1.4}$$

Auch **negative Exponenten** sind definiert, was man sich wie folgt klar machen kann:

$$a^n = a^{n+k-k} = a^n \cdot a^{-k} \cdot a^k \curvearrowright a^{-k} \cdot a^k = 1 \,.$$

Damit gilt:

$$a^{-k} \equiv \frac{1}{a^k} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (a \neq 0) \,. \tag{1.5}$$

Außerdem erkennen wir den wichtigen Spezialfall:

$$a^{k-k} \equiv a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \,. \tag{1.6}$$

Diese Beziehung gilt auch für $a = 0$.

Analog und in Erweiterung zu (1.4) werden **gebrochene Exponenten** eingeführt:

$$b^n = a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \curvearrowright b = a^{\frac{1}{n}} \,.$$

Man nennt

_n_-te Wurzel von _a_

$$a^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{a} \,. \tag{1.7}$$

Es handelt sich also um die Zahl, deren n-te Potenz gerade a ergibt.

Beispiele

$$\sqrt[2]{4} \equiv 4^{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \text{denn:} \qquad 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\sqrt[3]{27} \equiv 27^{\frac{1}{3}} = 3 \qquad \text{denn:} \qquad 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$\sqrt[4]{0{,}0001} \equiv 0{,}0001^{\frac{1}{4}} = 0{,}1 \qquad \text{denn:} \qquad 0{,}1^4 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}0001 \,.$$

Schließlich können wir auch **rationale Exponenten** zulassen:

$$a^{\frac{p}{q}} \equiv \sqrt[q]{a^p} \equiv \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \; . \tag{1.8}$$

Die letzte Verallgemeinerung auf beliebige reelle Zahlen wird später vollzogen.

1.1.2 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Unter einer *Zahlenfolge* wollen wir eine Folge von (indizierten) reellen Zahlen verstehen:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \quad a_n \in \mathbb{R} \; . \tag{1.9}$$

Es gibt endliche und unendliche Zahlenfolgen. Bei einer endlichen Folge ist n auf einen beschränkten Bereich aus $\mathbb{N}$ begrenzt. Die Folge wird abstrakt (kompakt) durch das Symbol

$$\{a_n\}$$

gekennzeichnet und stellt eine Abbildung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dar:

$$f\,:\, n \in \mathbb{N} \longrightarrow a_n \in \mathbb{R} \quad (n \longrightarrow a_n)\; .$$

Beispiele

1.
$$a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow a_1 = 1,\; a_2 = \frac{1}{2},\; a_3 = \frac{1}{3},\; a_4 = \frac{1}{4} \cdots \tag{1.10}$$

2.
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \longrightarrow a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2},\; a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3},\; a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4},\; \cdots \tag{1.11}$$

3.
$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow a_1 = 2,\; a_2 = \frac{3}{2},\; a_3 = \frac{4}{3},\; a_4 = \frac{5}{4},\; \cdots \tag{1.12}$$

Definition 1.1.1 ***Grenzwert einer Zahlenfolge***

Strebt a_n für $n \to \infty$ gegen eine einzige endliche Zahl a, so heißt a Grenzwert (Limes) der Folge $\{a_n\}$:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a\,; \quad a_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a\; . \tag{1.13}$$

Die mathematische Definition lautet:

$$\{a_n\} \quad \textbf{konvergiert gegen } a$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ derart, dass } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \,. \tag{1.14}$$

Gibt es *kein* solches a, so heißt die Folge *divergent*. Konvergiert $\{a_n\}$ gegen a, so gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenelemente mit einem Abstand größer als ε von a.

Beispiele

1.
$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \longrightarrow 0 \quad (\textit{Nullfolge}) \tag{1.15}$$

2.
$$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} \longrightarrow 1\,, \tag{1.16}$$

denn:
$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1\,.$$

Hier haben wir im Vorgriff bereits Regel (1.22) benutzt.

3.
$$\{a_n\} = \{q^n\} \longrightarrow 0\,, \quad \text{falls } |q| < 1\,. \tag{1.17}$$

Der Beweis dieser Aussage gelingt mit Hilfe des *Logarithmus*, den wir aber erst mit (1.65) einführen. Der Beweis zu (1.17) wird deshalb im Anschluss an (1.70) durchgeführt.

4.
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e} = 2{,}71828\ldots \quad \textit{Euler'sche Zahl}\,. \tag{1.18}$$

Dieser Grenzwert einer für die Anwendung wichtigen Folge sei hier ohne Beweis angegeben.

Das gilt auch für die folgenden

▸ Rechenregeln für Zahlenfolgen

deren explizite, recht einfache Begründung wir dem Leser überlassen, evtl. unter Zuhilfenahme der mathematischen Lehrbuchliteratur. Es gelte für zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,; \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b \tag{1.19}$$

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a \quad (c \in \mathbb{R}) \tag{1.20}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b \tag{1.21}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \quad (b, b_n \neq 0 \ \forall n)\ . \tag{1.22}$$

1.1.3 Reihen und Grenzwerte

Addiert man die Glieder einer unendlichen Zahlenfolge, so entsteht eine **Reihe**:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \ \curvearrowright \ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\ . \tag{1.23}$$

Die Reihe ist letztlich definiert als Grenzwert einer Folge von (endlichen) *Partialsummen*:

$$S_r = \sum_{m=1}^{r} a_m\ . \tag{1.24}$$

Die Reihe **konvergiert** gegen S, falls

$$\lim_{r\to\infty} S_r = S \tag{1.25}$$

existiert. Andernfalls ist sie **divergent**.

Eine *notwendige* Bedingung dafür, dass die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ konvergent ist, stellt die Forderung

$$\lim_{m\to\infty} a_m = 0 \tag{1.26}$$

dar. Falls $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ in der Tat konvergent ist, dann muss nämlich gelten:

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty}(S_m - S_{m-1}) = \lim_{m\to\infty} S_m - \lim_{m\to\infty} S_{m-1} = S - S = 0\ .$$

Gleichung (1.26) ist allerdings nicht hinreichend. Ein prominentes Gegenbeispiel stellt die **harmonische Reihe** dar:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\ . \tag{1.27}$$

Sie ist divergent, obwohl $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m} = 0$! Wir führen den Beweis als Aufgabe 1.1.3. Die Mathematik (Analysis) kennt verschiedene, notwendige und hinreichende Konvergenzkriterien für unendliche Reihen:

- Vergleichskriterium,
- Quotientenkriterium,
- Wurzelkriterium

Wir werden diese im Folgenden nicht explizit benötigen, belassen es deshalb hier bei der Aufzählung (s. Mathematik-Vorlesung zur Analysis).

Einen wichtigen Spezialfall einer unendlichen Reihe stellt die **geometrische Reihe** dar, für die gilt:

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^m + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} \,. \tag{1.28}$$

Die Partialsummen

$$S_r = q^0 + q^1 + \cdots + q^{r-1}$$

lassen sich leicht analytisch berechnen. Dazu multiplizieren wir die letzte Gleichung mit q,

$$q\,S_r = q^1 + q^2 + \cdots + q^r$$

und bilden die Differenz:

$$S_r - q\,S_r = S_r(1-q) = q^0 - q^r = 1 - q^r \,.$$

Damit folgt das wichtige Ergebnis:

$$S_r = \frac{1-q^r}{1-q} \,. \tag{1.29}$$

Interessant ist der Grenzwert:

$$\lim_{r\to\infty} S_r = \frac{1 - \lim_{r\to\infty} q^r}{1-q} \,.$$

Hierbei wurden (1.19) und (1.20) ausgenutzt. Es ist also wegen (1.17):

$$S = \lim_{r\to\infty} S_r = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}\,, \text{ falls } |q| < 1 \\ \text{nicht existent, falls } |q| \geq 1 \end{cases} \,. \tag{1.30}$$

1.1.4 Funktionen und Grenzwerte

Unter einer *Funktion* $f(x)$ versteht man die eindeutige Zuordnung einer *abhängigen* Variablen y aus dem **Wertebereich** W zu einer *unabhängigen* Variablen x aus dem **Definitionsbereich** D der Funktion $f(x)$:

$$y = f(x)\ ; \quad D \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} W \subset \mathbb{R}\ . \tag{1.31}$$

Wir fragen uns, wie sich $f(x)$ mit x ändert. Die Folge

$$\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

sei aus dem Definitionsbereich der Funktion f. Dann gibt es zu jedem x_n ein

$$y_n = f(x_n)$$

und damit eine „neue“ Folge $\{f(x_n)\}$.

Definition 1.1.2

$f(x)$ besitzt bei x_0 einen *Grenzwert* f_0, falls für *jede* Folge $\{x_n\} \to x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f_0\ . \tag{1.32}$$

Man schreibt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0\ . \tag{1.33}$$

Beispiele

1.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + x - 1}\ ; \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = ? \tag{1.34}$$

Für alle $x \neq 0$ können wir umformen:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}\ .$$

Für jede Folge $\{x_n\}$, die gegen ∞ strebt, bilden $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{x^3}$ Nullfolgen. Deshalb gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 + x - 1} = 1\ .$$

2.

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \; ; \quad \lim_{x \to 0} f(x) = ? \tag{1.35}$$

Für die spezielle Nullfolge $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ kennen wir nach (1.18) den Grenzwert, was sich aber auch für beliebige andere Nullfolgen zeigen lässt:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \, . \tag{1.36}$$

Wenn die Zuordnung

$$x \overset{f}{\longleftrightarrow} y \tag{1.37}$$

eineindeutig ist, so lässt sich zu f die

- **Umkehrfunktion**

f^{-1} definieren. Sie ergibt sich durch Auflösen von $y = f(x)$ nach x:

$$f^{-1}(f(x)) = x \, . \tag{1.38}$$

Beispiel

$$y = f(x) = ax + b \quad a, b \in \mathbb{R}$$
$$\curvearrowright \; x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a} \, .$$

Wir werden später noch einige weitere Beispiele kennen lernen. Man beachte, dass im Allgemeinen

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} \, .$$

Wichtig ist die oben schon geforderte Eindeutigkeit von f^{-1}, nur dann ist f^{-1} als *Funktion* zu definieren. So ist die Umkehrung von $y = x^2$ nicht eindeutig: $x = \pm\sqrt{y}$. Beschränkt man jedoch den Definitionsbereich von f z. B. auf nicht-negative x, so existiert die Umkehrfunktion.

1.1.5 Stetigkeit

Wir kommen nun zu dem wichtigen Begriff der

- **Stetigkeit**

$y = f(x)$ heißt **stetig** in x_0 aus dem Definitionsbereich von f, wenn es zu *jedem* $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für *jedes* x mit

$$|x - x_0| < \delta$$

folgt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Alternative Formulierung:

$y = f(x)$ heißt **stetig** in x_0 aus dem Definitionsbereich von f, wenn für *jede* Folge $\{x_n\} \to x_0$ folgt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f_0\,.$$

Der Grenzwert f_0 ist also gleich dem Funktionswert $f(x_0)$. Wir erläutern den Begriff der Stetigkeit an zwei Beispielen:

$$f(x) = \begin{cases} x & : \quad x \geq 1 \\ 1 & : \quad x < 1 \end{cases}\,. \tag{1.39}$$

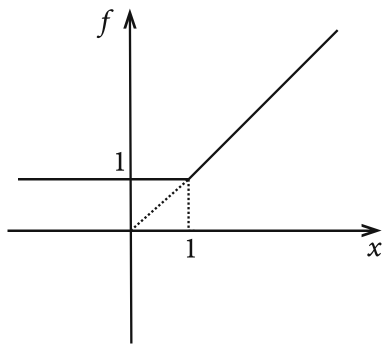

Abb. 1.1 Beispiel einer stetigen Funktion

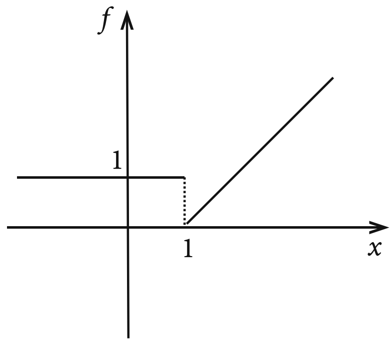

Abb. 1.2 Beispiel einer unstetigen Funktion

Die Funktion (1.39), dargestellt in Abb. 1.1, ist offensichtlich stetig, im Gegensatz zu der Funktion aus Abb. 1.2:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & : \quad x \geq 1 \\ 1 & : \quad x < 1 \end{cases}\,. \tag{1.40}$$

Diese Funktion ist offensichtlich unstetig in $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +1 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \,.$$

1.1.6 Trigonometrische Funktionen

Es ist davon auszugehen, dass die trigonometrischen Funktionen aus der Schulmathematik bekannt sind. Es sollen deshalb hier nur die wichtigsten Beziehungen zusammengestellt werden.

- **Bogenmaß**
  Abb. 1.3 veranschaulicht, dass man den Winkel φ nicht nur in Winkelgraden °, sondern ebenso eindeutig auch über den Kreisbogen s ausdrücken kann:

$$s = s(\varphi): \quad s(360°) = 2\pi r\,; \quad s(180°) = \pi r\,; \quad s(90°) = \frac{\pi}{2} r\,; \ldots$$

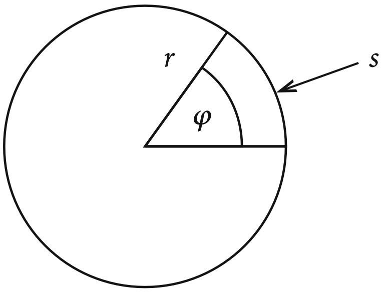

Abb. 1.3 Zur Definition des Bogenmasses

Man führt die dimensionslose Größe

Radiant

$$\varphi = \frac{s}{r} \tag{1.41}$$

ein:

$$\varphi(°) = 360(180, 90, 45, 1) \longrightarrow 2\pi\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{180}\right) \text{rad}\,. \tag{1.42}$$

- **Trigonometrische Funktionen**
  In dem rechtwinkligen Dreieck in Abb. 1.4 sind a die An-Kathete, b die Gegen-Kathete und c die Hypothenuse. Damit definiert man:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \tag{1.43}$$

https://www.springer.com/9783662575833

Grundkurs Theoretische Physik 1
Klassische Mechanik und mathematische Vorbereitungen
Nolting, Wolfgang
11. Aufl. 2018, XVII, 541 S. 233 Abb., 34 Abb. in Farbe.
ISBN 978-3-662-57583-3