
Matthias Bartelmann · Björn Feuerbacher · Timm Krüger ·
Dieter Lüst · Anton Rebhan · Andreas Wipf

Theoretische Physik 1 | Mechanik

 Springer Spektrum

 Springer

<http://www.springer.com/978-3-662-56114-0>

Theoretische Physik 1 | Mechanik
Bartelmann, M.; Feuerbacher, B.; Krüger, T.; Lüst, D.;
Rebhan, A.; Wipf, A.
2018, XXIV, 402 S. 178 Abb. in Farbe, Softcover
ISBN: 978-3-662-56114-0

Matthias Bartelmann
Universität Heidelberg
Heidelberg, Deutschland

Björn Feuerbacher
Heidenheim, Deutschland

Timm Krüger
University of Edinburgh
Edinburgh, Großbritannien

Dieter Lüst
Ludwig-Maximilians-Universität München
München, Deutschland

Anton Rebhan
Technische Universität Wien
Wien, Österreich

Andreas Wipf
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Jena, Deutschland

ISBN 978-3-662-56114-0

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-56115-7>

ISBN 978-3-662-56115-7 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

Ursprünglich erschienen in einem Band unter dem Titel „Theoretische Physik“

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Einbandabbildung: Collage unter Verwendung einer Einstein-Fotografie (Courtesy of the Caltech Archives, California Institute of Technology)

Einbandentwurf: deblik Berlin, nach einem Entwurf von Kristin Riebe

Grafiken: Kristin Riebe

Verantwortlich im Verlag: Lisa Edelhäuser

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany



<http://www.springer.com/978-3-662-56114-0>

Theoretische Physik 1 | Mechanik
Bartelmann, M.; Feuerbacher, B.; Krüger, T.; Lüst, D.;
Rebhan, A.; Wipf, A.
2018, XXIV, 402 S. 178 Abb. in Farbe, Softcover
ISBN: 978-3-662-56114-0

Wie dieses Buch zu lesen ist

Frage 16

Überzeugen Sie sich davon, dass $\hat{a}\psi_0 = 0$ ist.

Achtung Der Punkt über einer Größe, die neben der Zeit noch von anderen Größen abhängt, bezeichnet in der Regel die *vollständige* und nicht die *partielle* Zeitableitung, sofern es nicht anders definiert wird. ◀

Schrödinger-Gleichung im Impulsraum

Im Impulsraum ist \hat{p} ein Multiplikationsoperator, und die freie Schrödinger-Gleichung lautet

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}(t, \mathbf{p})}{\partial t} = H_0(\hat{\mathbf{p}})\tilde{\psi}(t, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\tilde{\psi}(t, \mathbf{p}). \quad (2.76)$$

Selbstfragen Mit den Selbstfragen wird der Lesefluss dort unterbrochen, wo Sie in der Lage sein sollten, vom bereits Besprochenen ausgehend einfache weiterführende Fragen zu beantworten, die unmittelbar danach im Text wieder aufgegriffen werden. Selbstfragen erleichtern es Ihnen zu überprüfen, inwieweit Sie den bis dahin verfolgten Gedankengang bereits verinnerlicht haben und weiterdenken können. Die Selbstfragen bieten Ihnen eine Gelegenheit, innezuhalten und sich eigene Antworten zu überlegen.

Achtung In der Achtung-Umgebung finden Sie kurze Einschübe und ergänzende Erläuterungen, die vor allem Missverständnisse oder zu weit gehende Schlussfolgerungen vermeiden, scheinbare Widersprüche aufklären oder auf verschiedene Konventionen hinweisen sollen. Die Achtung-Umgebung macht Sie damit auf Stellen aufmerksam, an denen Sie nicht auf Irrwege geraten oder sich in ungelösten oder verwirrenden Fragen verlieren sollten.

Merke Die Merke-Umgebung fasst die wichtigsten Aussagen der jeweils vorangehenden Erläuterungen und Diskussionen in solchen Abständen so zusammen, dass Ihnen die Abfolge von Merke-Umgebungen zur knappen Bündelung und Sammlung Ihres Wissens dienen kann und Ihnen bei der Wiederholung einen schnellen Überblick ermöglicht. In den Merke-Umgebungen werden die wichtigsten Aussagen knapp wiederholt und zusammengestellt.

Mischungstemperatur

Damit können wir sofort angeben, welche Temperatur sich einstellen wird, wenn zwei gemeinsam isolierte Systeme in thermischen Kontakt gebracht werden. Wenn keinerlei mechanische Arbeit ausgeübt wird, muss $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$ gelten, woraus

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0 = m_1 \int_{T_1}^T c_{V_1}(T') dT' + m_2 \int_{T_2}^T c_{V_2}(T') dT' \quad (1.19)$$

folgt, wenn c_V die spezifische Wärme pro Masse bei konstantem Volumen ist. Wenn zudem noch c_V von der Temperatur zumindest in genügender Näherung unabhängig ist, erhalten wir daraus

$$m_1 c_{V_1} (T - T_1) + m_2 c_{V_2} (T - T_2) = 0. \quad (1.20)$$

Dies liefert die Mischungstemperatur

$$T = \frac{m_1 c_{V_1} T_1 + m_2 c_{V_2} T_2}{m_1 c_{V_1} + m_2 c_{V_2}}, \quad (1.21)$$

die bei gleichen Wärmekapazitäten allein durch das Massenverhältnis und die Ausgangstemperaturen bestimmt wird:

$$T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.22)$$

Beispiel Beispiele in ganz verschiedener Länge und Ausführlichkeit erläutern die Darstellung durch Anwendungen, erklären Gleichungen oder Herleitungen anhand einfacher Systeme oder gehen auf Spezialfälle ein, die für den fortlaufenden Text nicht entscheidend, aber dennoch zum Verständnis nützlich oder wichtig sind. Beispiele geben Ihnen auch eine Gelegenheit, Ihr Verständnis abstrakterer Aussagen dadurch zu überprüfen, dass Sie sie auf konkrete Fälle übertragen.

Vertiefung: Zur Bestimmung der absoluten Entropie

Bei der Temperatur T gilt aufgrund der Definition der Entropie

$$\Delta S = \int_0^T \frac{\delta Q_{rev}}{T} = S_T - S_0.$$

Nun gibt es in der Thermodynamik noch einen dritten Hauptsatz, auch als *Nernst'scher Theorem* bezeichnet, auf den wir in Abschn. 2.3 zurückkommen werden. Nach diesem Satz verschwindet die Entropie am absoluten Nullpunkt, $S_0 = 0$. Aufgrund dessen können wir den Entropieschied ΔS relativ zum absoluten Nullpunkt mit der Entropie S und ebenso mit S_T identifizieren und

$$S = \int_0^T \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

scheiben. Findet die Erwärmung von $T = 0$ nach T bei konstantem Druck statt, dann ist

$$S = n \int_0^T c_p^{(m)}(T) \frac{dT}{T}.$$

Auf dem Weg vom absoluten Nullpunkt bis zur Temperatur T geschieht jedoch einiges mit einem Stoff, und dabei ändert sich seine Wärmekapazität. Sehen wir uns dies für Tetrachlorkohlenstoff CCl_4 näher an. Er liegt bei einer angenehmen Zimmertemperatur von 298,1 K als eine Flüssigkeit vor, die gerade zu verdampfen beginnt.

Bei tiefen Temperaturen sind die Wärmekapazitäten reiner kristalliner Stoffe proportional zur dritten Potenz der Temperatur.

$$c_p^{(m)} = b T^3 \quad \text{für } T \lesssim T_0 = 10 \text{ K.}$$

wie in Abschn. 5.7 gezeigt wird. Die Proportionalitätskonstante hat für CCl_4 den Wert $3,14 \cdot 10^{-10} \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Bei $T_1 = 225,4 \text{ K}$ ändert sich der Aufbau des Kristallgitters des bei diesen Temperaturen gefrorenen Stoffes; es erfolgt ein Übergang von einer festen Phase in eine andere. Dafür wird eine Wärmemenge von $\Delta Q_1 = 4524 \text{ J mol}^{-1}$ verbraucht. Bei $T_2 = 250,2 \text{ K}$ schmilzt der Kristall. Die Schmelzwärme, die für die Umwandlung des Kristalls in eine Flüssigkeit benötigt wird, beträgt $\Delta Q_2 = 2416 \text{ J mol}^{-1}$. Für die Verdampfung bei $T_3 = 298,1 \text{ K}$ werden $\Delta Q_3 = 32.407 \text{ J mol}^{-1}$ aufgebraucht. Daraus ergibt sich für die Entropie (in $\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$)

$$S_T = b \int_0^{T_1} T^2 dT + \int_{T_1}^{T_2} c_p^{(m)} \frac{dT}{T} + \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \int_{T_2}^{T_3} c_p^{(m)} \frac{dT}{T} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} + \int_{T_3}^T c_p^{(m)} \frac{dT}{T} + \frac{\Delta Q_3}{T_3}.$$

Bei $T_1 = 298,1 \text{ K}$ hat CCl_4 einen Dampfdruck von 14.819 Pa. Um den Dampf auf den Normdruck von 101.325 Pa zu bringen, muss man ihn komprimieren. Dabei verringert sich die Entropie um

$$\Delta S = R \ln \frac{p_{\text{Norm}}}{p_{\text{Dampf}}}$$

Die Integranden $c_p^{(m)}$ sind entsprechend den experimentellen Werten von $c_p^{(m)}$ Funktionen der Temperatur. Die Integrationen werden numerisch ausgeführt. Die einzelnen Entropieanteile pro Mol und ihre Summe sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Insgesamt treten drei Phasenübergänge auf, nämlich bei der Unordnung des Kristallgitters, beim Schmelzen und beim Verdampfen. In allen drei Fällen musste Wärme zugeführt werden. Solche Wärmebeiträge, die während Phasenübergängen auftreten können (nicht müssen!), heißen latente Wärmen. Beachten Sie, dass die latenten Wärmen bei den Phasenübergängen wesentlich zur Gesamtblanz beitragen.

Entropiebeitrag	$\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$S_T = b \int_0^T T^2 dT$	1,05
$S_T - S_0$ (numerisch)	151,89
ΔS_1 (Phasenübergang)	20,05
$S_T - S_1$ (numerisch)	12,89
ΔS_2 (Schmelzen)	9,67
$S_T - S_2$ (numerisch)	22,81
ΔS_3 (Verdampfung)	108,57
ΔS (Kompression)	-15,4
Entropie insgesamt	313,22

Ähnlich verfährt man mit anderen Stoffen. Die Entropien einiger Feststoffe, Flüssigkeiten und Gase bei 298 K sind in der nächsten Tabelle zusammengestellt.

Aggregatzustand	Stoff	Entropie $\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Feststoffe	Graphit, C	5,7
	Diamant, C	2,4
Flüssigkeiten	Iod, I ₂	116,1
	Benzol, C ₆ H ₆	173,3
	Wasser, H ₂ O	69,9
Gase	Quecksilber, Hg	76,0
	Methan, CH ₄	186,1
	Kohlendioxid, CO ₂	213,6
	Wasserstoff, H ₂	130,6
	Helium, He	126,0

Wie wir sehen werden, lässt sich die Entropie eines Körpers auch theoretisch berechnen. In der Luft unseres Zimmers, in einem Stück Kerze – in jedem Körper steckt eine bestimmte Entropie.

Vertiefung In der Vertiefungs-Umgebung finden Sie längere Abschnitte, die einzelne Themen aus dem fortlaufenden Text herausgreifen, um sie genauer zu besprechen. Sie hat vor allem den Sinn, solche Inhalte nicht zu übergehen, die beim ersten Lesen oder in Vorlesungen oft nicht behandelt werden können oder zu weit führen, die aber zum Verständnis, zur weiteren Anwendung des Stoffes und dazu nützlich sind, Querverbindungen herzustellen.



Anwendung in der Technik: Magnetrons

Mikrowellen (sowohl für Mikrowellenherde im Haushalt als auch beispielsweise in der Radartechnik) werden in Vakuumröhren erzeugt, meist in sogenannten *Magnetrons*. Hierfür wird letztlich eine sich drehende Ladungsverteilung benutzt, was analog zu einer harmonisch schwingenden Ladungsverteilung ist. Abb. 9.7 illustriert die grundsätzliche Funktionsweise:

Aus der Glühkathode in der Mitte treten Elektronen aus. Diese werden durch ein elektrisches Feld zunächst nach außen beschleunigt, durch ein zusätzliches Magnetfeld aber dann auf Epizykloidenbahnen gezwungen. Die Elektronen geben bei dieser beschleunigten Bewegung selbst wiederum elektromagnetische Strahlung ab und regen die runden Öffnungen in der Wand (Hohlraumresonatoren) zu Eigenschwingungen an.

Die Felder dieser Hohlraumresonatoren beeinflussen ihrerseits wieder die Elektronen: Einige werden abgebremst, einige beschleunigt, sodass sich Bereiche höherer und niedrigerer Elektronendichte ausbilden. Diese Elektronenwolken (ein rotierendes „Speichermaß“) beeinflussen dann wiederum die Schwingungen der Hohlraumresonatoren. Die insgesamt resultierende Strahlung wird schließlich aus dem Magnetron durch einen Hohlleiter ausgekoppelt.

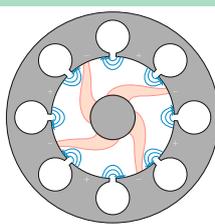


Abb. 9.7 Elektronendichteverteilung im Magnetron (rot) und die elektrischen Felder der Hohlraumresonatoren (blau).

1.5 Mathematischer Hintergrund: Differenzialgleichungen Lösungsverfahren

Es gibt kein festes Lösungsverfahren, mit dem man beliebige Differenzialgleichungen (DGLs) lösen kann. Manchmal hilft ein geschickter Lösungsansatz, oder eine Lösung kann erraten werden. Folgende „Kochrezepte“ sind beim Lösen von DGLs nützlich.

Trennung der Veränderlichen für $y'(t) = f(t)g(y(t))$
Um das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(t) = f(t)g(y(t))$$

mit $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $y(t_0) = y_0$ und $g(y_0) \neq 0$ lokal zu lösen, dividieren wir zunächst durch $g(y(t))$. Dies ist zulässig, da g und y stetig sind und deshalb wegen $g(y(t_0)) = g(y_0) \neq 0$ auch $g(y(t)) \neq 0$ in einer Umgebung U von t_0 gilt. In ganz U hat $g(y(t))$ ferner das gleiche Vorzeichen. Danach integrieren wir von t_0 bis t und erhalten

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{t_0}^t f(t) dt,$$

was aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zur vorigen Gleichung äquivalent ist. Mithilfe der Kettenregel lässt sich die linke Seite umformen, sodass wir

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{t_0}^t f(t) dt \text{ bzw. } H(y(t)) = \int_{t_0}^t f(t) dt$$

mit $H(y) = \int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)}$ erhalten. Da g in ganz U das gleiche Vorzeichen hat, ist H streng monoton wachsend bzw. fallend und besitzt in U eine Umkehrfunktion H^{-1} . Somit ist $y(t) = H^{-1}\left(\int_{t_0}^t f(t) dt\right)$ eine Lösung des AWP. Die es folgenden Umformungsschritte lassen sich sehr leicht merken, wenn man die Ableitung $y'(t)$ als Differentialquotient dy/dt schreibt, dann formal mit dem Differential dt multipliziert und die Variablen trennt (alles mit y nach links, alles mit t nach rechts), danach integriert und schließlich das Ganze nach $y(t)$ auflöst.

Substitution bei $y'(t) = f(at + by(t) + c)$ Die DGL

$$y'(t) = f(at + by(t) + c)$$

mit $b \neq 0$ geht nach Substitution von $g(t) = at + by(t) + c$ wegen $g'(t) = a + b y'(t)$ über in

$$g'(t) = a + b f(g(t)),$$

welche durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann.

Substitution bei $y'(t) = f(y(t)/t)$ Eine DGL der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

geht nach der Substitution $g(t) = y(t)/t$ über in

$$g'(t) = \frac{f(g(t)) - g(t)}{t}.$$

Diese DGL kann anschließend durch Trennung der Variablen gelöst werden.

Lineare DGL $y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)}(t) = f(t)$ Die Lösungsverfahren für lineare DGLs ($y^{(n)}$ ist die n -te Ableitung von y nach t) werden im „Mathematischen Hintergrund“ 6.3 beleuchtet.

Numerische Verfahren Selbst wenn ein AWP eindeutig lösbar ist, bedeutet dies noch lange nicht, dass man die Lösung explizit angeben kann. Für viele Fragen (z. B. Wettervorhersage oder „In welcher Entfernung passiert ein Meteorit die Erde?“) spielt es auch gar keine Rolle, ob die Lösung einer DGL, bzw. eines Systems von DGLs explizit oder nur implizit angegeben werden kann. Tatsächlich interessiert nur die näherungsweise Berechnung von bestimmten Werten von $y(t), y'(t), \dots$ mit ausreichender Genauigkeit. Hierzu gibt es zahlreiche numerische Verfahren, deren Beschreibung allerdings den Umfang dieses mathematischen Hintergrunds oder des Buches sprengen würde.

Literatur

- Walter, W.: Gewöhnliche Differenzialgleichungen: Eine Einführung, 7. Aufl., Springer (2000).
- Möller, F., Kieß, M.: Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2, 2. Aufl., Spektrum (2012).
- Strehmel, K., Weiner, R., Podhansky, H.: Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Springer Spektrum (2012).

So geht's weiter

Determinismus und Chaos

Lässt sich das Verhalten der Natur eindeutig aus einer unverselbten, fundamentalen Theorie herleiten? Der von dieser Frage implizite Determinismus in der klassischen Physik wurde schon vom französischen Wissenschaftler Pierre-Simon Laplace mathematisch untersucht. Für Laplace war die Welt vollständig determiniert: Würde man nur die Anfangsbedingungen und die Bewegungsgesetze der klassischen Physik genau kennen, so ließe sich jeder zukünftige Zustand des Universums aus den mathematischen Differenzialgleichungen genau berechnen. Auf diese Weise wäre es nach Laplace also zumindest im Prinzip möglich, ein in diesem Zusammenhang oft als Laplace'scher Dämon bezeichnetes Wesen zu postulieren, das alles vorherzagt, was geschehen wird und alles erklärt, was jemals geschehen ist. Dass es in der Praxis jedoch unmöglich sein könnte, diese so determinierte Zukunft eindeutig vorherzusagen, war auch schon Laplace bewusst, da es beispielsweise in einem System von vielen Freiheitsgraden empirisch nicht möglich ist, alle Anfangsbedingungen genau zu bestimmen. Diese Einsicht zeigt sich auch in den Ergebnissen der Chaosforschung: Schlägt ein Schmetterling in China mit den Flügeln, kann man daraus nicht das Wetter in Europa berechnen, wenigleich ein Zusammenhang zwischen beiden Ereignissen bestehen kann.



Abb. 7.3 Der Baum des Pythagoras

Die Chaosforschung befasst sich mit dynamischen, nichtlinearen Systemen, deren jeweiliges Verhalten sehr empfindlich von den gewählten Anfangsbedingungen abhängt. Dies mag einerseits in Systemen mit vielen Freiheitsgraden der Fall sein, andererseits jedoch auch in solchen mit wenigen Freiheitsgraden. Dort hat man es dann wie im Falle der schwingenden Atwood'schen Maschine oder des Doppelpendels mit komplexen, gekoppelten, nichtlinearen Bewegungsgleichungen zu tun, welche nur noch numerisch lösbar sind. Das Verhalten der chaotischen Systeme erscheint auf lange Zeilen gesehen als irregulär und ungeordnet. Dennoch können sich nach einiger Zeit bestimmte Muster bilden, die durch universelle Konstanten gegeben sind. Ein typisches Verhalten von chaotischen Systemen ist die *Bifurkation* zusammen mit der Selbstreproduktion von bestimmten Formen, die allein gesehen nicht regulär sind, sich aber immer wiederholen. Ein schönes Beispiel hierfür ist der *Raum des Pythagoras* (Abb. 7.3), dessen kleiner werdende Verzweigungen immer wieder die Form der vorherigen Struktur reproduzieren. Wie genau können wir uns diesem Begriff des Chaos nähern? Schon bei der alltäglichen Beobachtung der vielfältigen Vorgänge in der Natur sehen wir, dass bereits die klassische Physik eine immense Fülle von Möglichkeiten für uns bereithält. Auch hier können wir unter Umständen nicht alles berechnen – was sich allein daraus ergibt, dass man es oft mit komplexen Systemen zu tun hat, die aus sehr vielen einzelnen Teilchen bestehen. Diese Feststellung mag zunächst trivial klingen, sie ist jedoch sehr wichtig im Hinblick auf das bessere Verständnis der fundamentalen Gesetze der Natur und deren Bedeutung.

Ein Spiel, das sehr gut die Problematik verdeutlicht, ist Mikado, welches aus einer großen Anzahl gleichartiger, lediglich verschieden markierter Stäbchen besteht. Diese werden, nachdem sie gebündelt und mit der Hand festgehalten werden, plötzlich losgelassen und verteilen sich dann in großer Unordnung über die Tischoberfläche. Die Ausgangslage ist dabei offensichtlich immer die gleiche. Vor dem Loslassen sind alle Mikadostäbchen parallel und gleich ausgerichtet. Es ist aber praktisch unmöglich, dass sie sich, nachdem sie die Hand verlassen haben, immer gleich über den Tisch verteilen. Trotz scheinbar gleicher Anfangsbedingungen sieht jedes Spiel vollkommen anders aus, und dabei gibt es eine immense Anzahl von Mustern, welche die Mikadostäbchen auf dem Tisch bilden können. Obwohl es sich um klassische Physik handelt, durch welche die Stäbchen beschreibbar sind, sind diese Muster schwer von uns vorherzusagen und auch schwer zu berechnen, obwohl die zugrunde liegenden Gleichungen sehr einfach sind und wir in Prinzip alle Informationen besitzen, um die Lage der einzelnen Mikadostäbchen berechnen zu können.

Berechnen wir im Gegensatz dazu beim Billard den Lauf der Billardkugel, dann können wir mit etwas Geschick und Übung sehr gut vorausbestimmen und auch berechnen, wie sich die Kugel verhalten wird. Sowie eine Billardkugel an den Rand des Billardtisches, so ist der Ausfallswinkel (im Abwesenheit eines Spins der Kugel) immer gleich dem Einfallswinkel, und der Stoß der Billardkugel untereinander folgt ähnlich einfachen Gesetzmäßigkeiten, nämlich des elastischen Stoßes mit Impuls- und Energieerhaltung.

Anwendung Anwendungen stehen zwischen Vertiefungen und Beispielen. Sie können einerseits insofern als erweiterte Beispiele angesehen werden, als der Stoff dort auf konkrete Systeme übertragen wird und andererseits insofern als Vertiefungen, als die dort besprochenen Themen bei einem ersten Durchgang übergangen werden können. Die Anwendungen sollen es Ihnen ermöglichen, Ihr Verständnis anhand weiterführender Beispiele zu vertiefen und Ihr bereits bestehendes Wissen zu übertragen.

Mathematischer Hintergrund Unter dieser Bezeichnung wird losgelöst vom fortlaufenden Text prägnant umrissen, welche mathematischen Themen und weitergehenden Fragestellungen an das behandelte Gebiet anschließen oder auf welchen mathematischen Grundlagen eine physikalische Betrachtung aufbaut. Sie finden hier auch Beweiseideen und Literaturvorschläge. In den Mathematischen Hintergründen können Sie Formeln nachschlagen oder sich mathematische Zusammenhänge wieder ins Gedächtnis rufen.

So geht's weiter In diesen meist ausführlichen Umgebungen werden Themen beschrieben, die jenseits des eigentlichen Stoffumfangs stehen, aber interessante Ausblicke in daran anschließende, weiterführende Fragestellungen und Probleme bieten. Diese So-geht's-weiter-Umgebungen sollen Ihnen einen Anstoß geben, Ihr bis dahin erworbenes Wissen zu erproben und in angrenzende Bereiche hinein zu erweitern. Diese Teile sollen Ihren Appetit anregen, mehr zu erfahren und über den üblichen Stoff hinauszudenken.

Die Newton'schen Axiome

1



Was bedeutet „klassische Mechanik“?

Wie lauten die Newton'schen Axiome?

Was ist ein Inertialsystem?

Wie löst man einfache Bewegungsgleichungen?

Was sind konservative Kräfte?

Was besagt der Energieerhaltungssatz?

1.1	Definitionen und Grundlagen	2
1.2	Die Newton'schen Axiome	6
1.3	Eindimensionale Bewegung im homogenen Schwerfeld	12
1.4	Energiesatz in einer Dimension	18
1.5	Bewegung in drei Dimensionen	23
1.6	Energieerhaltung und konservative Kräfte	28
	Aufgaben	36
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	39
	Literatur	45

Das vorliegende Kapitel liefert eine Einführung in die grundlegenden Konzepte der klassischen, nichtrelativistischen Mechanik. Ein wichtiges Fundament dieser Theorie ist das physikalische Verständnis der Begriffe „Raum“ und „Zeit“, „Körper“ und „Masse“, „Kraft“ und „Inertialsystem“. Auf der Basis dieser Größen werden wir die Newton'schen Axiome kennenlernen und erarbeiten. Sie bestimmen, auf welchen Bahnkurven sich Punktmassen bewegen. Zusätzlich werden wir zahlreiche mathematische Begriffe definieren und Techniken kennenlernen, die ein tieferes Verständnis der Mechanik überhaupt erst ermöglichen.

1.1 Definitionen und Grundlagen

In diesem Abschnitt finden Sie eine kurze historische Einführung in die klassische Mechanik. Anschließend werden wir zentrale physikalische und mathematische Größen einführen sowie das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik vorstellen.

Eine kurze historische Einführung in die klassische Mechanik

Im Studium der theoretischen Physik beginnt man in den meisten Fällen mit der Mechanik. Das ist sinnvoll, da sie die älteste der theoretischen Physikdisziplinen darstellt und sich die grundlegenden physikalischen Begriffe in der Mechanik einführen und auf andere Theorien übertragen lassen. Darüber hinaus ist die theoretische Mechanik auch die anschaulichste Disziplin, da sie überwiegend Alltagsphänomene beschreibt. Historisch bauen viele andere Physikdisziplinen auf der klassischen Mechanik auf (z. B. die Quantenmechanik und die statistische Mechanik). Ursprünglich wurde sogar versucht, sämtliche Naturbeobachtungen im Rahmen der Mechanik zu verstehen (*mechanisches Weltbild*). Obwohl dies letztlich nicht möglich ist, spielt die Mechanik noch immer eine fundamentale Rolle in der Physik; sie kann als allgemeine Grundlage der Physik angesehen werden.

Die geschichtliche Entwicklung der Mechanik könnte ein eigenes Buch füllen. Hier sollen nur die grundlegendsten Meilensteine zusammengefasst und die wichtigsten Personen genannt werden. *Archimedes* (287–212 v. Chr.) formulierte die sogenannten Hebelgesetze und das nach ihm benannte Prinzip. Rund 1700 Jahre später wurden die Planetenbahnen von *Nikolaus Kopernikus* (1473–1543) und *Tycho Brahe* (1546–1601) studiert. *Johannes Kepler* (1571–1630) gelang es, diese Beobachtungen im Rahmen des heliozentrischen Weltbildes zu verstehen. *Galileo Galilei* (1564–1642) leistete mit seinen Fallversuchen und Pendelexperimenten wichtige Beiträge zur Mechanik. Ebenso formulierte er das nach ihm benannte Relativitätsprinzip.

Der wohl wichtigste Physiker in der Geschichte der Mechanik war *Isaac Newton* (1643–1727). So formulierte er nicht nur die fundamentalen Axiome der Mechanik, er entwickelte auch parallel zu *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) die Differenzial- und Integralrechnung und kombinierte Keplers und

Galileis Erkenntnisse, was auf die Beschreibung der Schwerkraft führte. Nach Newton wurde die Mechanik zur *analytischen* Mechanik weiterentwickelt. *Johann Bernoulli* (1667–1748) löste damit das Problem der Brachistochrone (dies ist die Kurve, auf der eine Punktmasse reibungsfrei am schnellsten von einem Punkt zu einem anderen fällt; sie wird in Aufgabe 5.5 besprochen), was die Entwicklung der Variationsrechnung einläutete. Auch weitere Mitglieder der Bernoulli-Familie lieferten wichtige Beiträge zur Mathematik und Physik.

Für die Entwicklung der analytischen Mechanik war auch *Leonhard Euler* (1707–1783) entscheidend mitverantwortlich. Nach ihm wurden zahlreiche Gleichungen benannt, die in der Variationsrechnung, der Hydrodynamik und der Kreisbewegung fundamentale Bedeutung besitzen. *Jean-Baptiste le Rond d'Alembert* (1717–1783) legte die Grundsteine für die Kontinuumsmechanik. *Joseph-Louis Lagrange* (1736–1813) begründete den Lagrange-Formalismus, dem eine wesentliche Rolle in diesem Buch zukommt. Die Hamilton'sche Mechanik, die von *William Rowan Hamilton* (1805–1865) ausgearbeitet wurde, ist heute in der Quantenmechanik unverzichtbar. Die moderne Betrachtungsweise von Symmetrien und Erhaltungsgrößen wurde von *Amalie Emmy Noether* (1882–1935) entwickelt. Schließlich entwickelte *Albert Einstein* (1879–1955) die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie fast im Alleingang.

In Bd. 1 wird zunächst die klassische Mechanik behandelt. Sie beinhaltet sowohl die Newton'sche als auch die Lagrange'sche, die Hamilton'sche sowie die relativistische Mechanik. Die Quantenmechanik jedoch wird als nichtklassisch bezeichnet. Ihr ist Bd. 3 gewidmet.

Die theoretische Mechanik beschreibt die Gesetze, nach denen sich Massen unter dem Einfluss von Kräften mit der Zeit im Raum bewegen. Kräfte sind dabei die Ursache der Bewegung und mathematisch und physikalisch noch genauer zu definieren. Die Analyse der klassischen Mechanik führt zu Begriffen und Methoden, die sich durch die gesamte theoretische Physik ziehen und vor allem für die Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie außerordentlich fruchtbar sind.

Die klassische Punktmechanik, mit der wir uns zuerst beschäftigen werden, kennt dabei eine Vierheit von Objekten: Körper, Kräfte, Raum und Zeit. Die modernen Theorien für eine Vereinheitlichung der Physik werden später fundamental an diesen Begriffen einsetzen. Die Feldtheorie, geschichtlich zuerst die Elektrodynamik, wird dazu Kräfte und den Raum miteinander verbinden, die spezielle Relativitätstheorie dann Raum und Zeit, und die allgemeine Relativitätstheorie schließlich verknüpft Körper mit der Raum-Zeit-Struktur.

Der Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik

Um physikalische Systeme verstehen zu können, müssen häufig Vereinfachungen und Idealisierungen vorgenommen werden.

Dabei versucht man, für das Problem wichtige und unwichtige Effekte voneinander zu trennen. Eine dafür wesentliche mathematische Methode ist die sogenannte *Taylor-Entwicklung*, die im Laufe dieses Kapitels erläutert wird. Erst durch dieses Vorgehen wird es überhaupt möglich, Theorien und Naturgesetze zu formulieren. Unser erstes Beispiel für dieses Vorgehen ist die Approximation von ausgedehnten Körpern durch punktförmige Massen. Hierbei werden die räumliche Ausdehnung und mögliche innere Freiheitsgrade der Objekte vernachlässigt. So gelten die Newton'schen Gesetze beispielsweise zunächst auch nur für punktförmige Massen. Die Auswirkungen der Ausdehnung der Objekte kann allerdings später durch zusätzliche Gleichungen beschrieben werden.

In der klassischen Mechanik werden Körper als Punkte bestimmter Masse, sogenannte *Punktmassen*, beschrieben. Ihre Ausdehnung ist dabei klein gegenüber den Dimensionen des Gesamtsystems. Die Begriffe „klein“ und „groß“ sind hier als relative Bezugsangaben zu verstehen. So ist beispielsweise die Erde im Vergleich zu einer Raumstation, die sie umkreist, groß. Relativ zur Ausdehnung der Sonne oder sogar der Milchstraße ist die Erde jedoch klein.

Eine Punktmasse wird allein durch ihre Masse m und ihren Ort $x(t)$ zur Zeit t beschrieben. Ausgedehnte starre Körper können dann als Systeme von Punktmassen aufgefasst werden, deren Abstände untereinander konstant sind. Punktmassen sind Idealisierungen, da sämtliche Alltagsgegenstände eine Ausdehnung besitzen. Andererseits können beispielsweise einige Elementarteilchen wie Elektronen doch als Punktmassen angesehen werden, da es experimentell bisher nicht gelungen ist, eine innere Struktur von Elektronen zu beobachten. Die obere Grenze für den Elektronenradius liegt derzeit bei etwa 10^{-19} m.

Der physikalische Raum, in dem sich die klassische Mechanik abspielt, ist ein kontinuierlicher, dreidimensionaler *Vektorraum* (siehe „Mathematischer Hintergrund“ 1.1). Dieser Raum ist flach, also nicht gekrümmt, d. h., dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks stets 180° beträgt. Beispiele für gekrümmte zweidimensionale Räume sind die Oberflächen einer Kugel oder eines Sattels.

Im Rahmen der klassischen Mechanik sind die Eigenschaften des Raumes unabhängig von der Existenz von Körpern und deren Bewegung. Die Lage von Körpern wird stets relativ zu anderen Körpern, den *Bezugssystemen*, angegeben. Ein häufig anzutreffendes Bezugssystem ist das sogenannte *Laborsystem*, das durch die Wände desjenigen Labors definiert ist, in dem Experimente durchgeführt werden. Wir werden später darauf zurückkommen, welche Bezugssysteme am geeignetsten sind, um physikalische Gesetze zu formulieren.

Im Allgemeinen gelten die Annahmen der *Homogenität* und *Isotropie* des Raumes, d. h., ein Bezugssystem kann beliebig (aber zeitunabhängig) verschoben und gedreht werden. Typischerweise wird ein *kartesisches Koordinatensystem* für das Bezugssystem gewählt (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 1.2 und darauf aufbauend den „Mathematischen Hintergrund“ 1.3).

Die Zeit ist in der nichtrelativistischen Mechanik ein absoluter, kontinuierlicher und unabhängiger Parameter. Das heißt unter anderem, dass sich jedem *Ereignis* ein eindeutiger Zeitpunkt t zuordnen lässt und sich alle Ereignisse eindeutig zueinander anordnen lassen (ein Ereignis kann somit gleichzeitig, früher oder später als ein anderes Ereignis eintreten). Es wird im Rahmen der Newton'schen Mechanik postuliert, dass es eine für alle Bezugssysteme universelle Zeit gibt. Von dieser Hypothese muss man in der speziellen Relativitätstheorie abrücken.

Der Nullpunkt der Zeit ist im Allgemeinen frei wählbar. Letzteres wird als *Homogenität der Zeit* bezeichnet. Um Zeiten zu messen, benötigt man nicht zuletzt periodische Vorgänge (z. B. die Tageslänge, die Schwingungsdauer eines Pendels oder einer Lichtwelle).

Kräfte wirken in der nichtrelativistischen Mechanik instantan, d. h. von ihrer Wirkung wird angenommen, dass sie sich mit einer unendlichen Geschwindigkeit ausbreitet; Ursache und Wirkung einer Kraft ereignen sich also gleichzeitig.

Die klassische, nichtrelativistische Mechanik ist gültig in alltäglichen Dingen, bei denen

- Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind,
- Abstände groß gegenüber Atomdurchmessern sind,
- Abstände klein gegenüber kosmologischen Ausdehnungen sind,
- Massen hinreichend klein sind.

Die spezielle Relativitätstheorie wird sich als eine Erweiterung der Newton'schen Mechanik erweisen, in der Geschwindigkeiten nicht auf Werte beschränkt sind, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Sie wird in Kap. 9 diskutiert. Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie, die in diesem Buch nicht behandelt wird, werden sowohl kosmologische Abstände als auch beliebig große Massen, die den Raum krümmen, betrachtet. Systeme, bei denen die Abstände in der Größenordnung von Atomdurchmessern liegen, werden durch die Quantenmechanik in Bd. 3 beschrieben.

Einführung der mechanischen Grundgrößen

Die Gleichungen der klassischen Mechanik lassen sich mithilfe der linearen Algebra formulieren. Zu diesem Zweck führen wir hier alle für den Anfang relevanten Größen ein und beginnen mit dem *Ortsvektor* x . Ein Ortsvektor x einer Punktmasse m beschreibt ihre Position im Raum relativ zu einem Koordinatensystem. Ausgedehnte Körper werden zusätzlich durch ihre Orientierung relativ zu den Achsen des Koordinatensystems charakterisiert. Sie werden in Kap. 4 behandelt. Die grundlegenden Konzepte der klassischen Mechanik lassen sich jedoch anhand von Punktmassen veranschaulichen, bevor der Schritt zu ausgedehnten Objekten unternommen wird.

1.1 Mathematischer Hintergrund: Vektorräume

Auf den ersten Blick haben die Menge der Verschiebungen im \mathbb{R}^3 , die Menge der Polynome einer Veränderlichen mit rationalen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n und die Menge der Paare von reellen Zahlen nicht viel gemeinsam. Tatsächlich jedoch handelt es sich bei allen dreien um *Vektorräume*, denn man kann die Elemente dieser Mengen addieren und vervielfachen, und dabei gelten gewisse Regeln, z. B. das Kommutativ- und Assoziativgesetz. Um den Begriff „Vektorraum“ allgemein fassen zu können, müssen wir zuerst die relevanten Eigenschaften der reellen Zahlen formulieren.

Definition Körper Eine Menge \mathbb{K} ist ein *Körper*, wenn es

- eine *Addition* $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x + y$ gibt, sodass \mathbb{K} bezüglich der Addition eine additive abelsche Gruppe ist (Gruppen werden im „Mathematischen Hintergrund“ 2.4 vertieft.):
 - *Assoziativgesetz*: Es gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$.
 - *Existenz des neutralen Elements*: Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$, sodass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $x + 0 = x$.
 - *Existenz des Inversen*: Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein inverses Element $-x$ mit $x + (-x) = 0$.
 - *Kommutativgesetz*: Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $x + y = y + x$.
- eine *Multiplikation* $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto xy$ gibt, sodass $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation eine multiplikative abelsche Gruppe ist:
 - *Assoziativgesetz*: Es gilt $x(yz) = (xy)z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$.
 - *Existenz des neutralen Elements*: Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$, sodass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $1x = x$.
 - *Existenz des Inversen*: Zu jedem Element $0 \neq x \in \mathbb{K}$ gibt es ein inverses Element x^{-1} mit $x(x^{-1}) = 1$.
 - *Kommutativgesetz*: Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $xy = yx$.
- das *Distributivgesetz* erfüllt ist: Es gilt $x(y + z) = xy + xz$ für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Die Gruppen $(\mathbb{K}, +)$ bzw. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ nennt man *abelsch* (nach dem norwegischen Mathematiker *Niels Henrik Abel*, 1802–1829), da die Gruppen das Kommutativgesetz erfüllen. Beispiele für Körper sind die rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die reellen Zahlen \mathbb{R} . Die Menge der rationalen Funktionen einer Veränderlichen mit reellen Koeffizienten $\mathbb{R}(X)$ bildet ebenfalls einen Körper. Es gibt auch endliche Körper, z. B. die Restklassen modulo 7.

In der Physik werden die Elemente eines Körpers als *Skalare* bezeichnet. Es handelt sich dabei praktisch immer um reelle und komplexe Zahlen (\mathbb{R} und \mathbb{C}). Zu komplexen Zahlen siehe Kap. 6.

Nachdem wir den Begriff „Körper“ definiert haben, können wir den Begriff *Vektorraum* präzisieren. Dieser enthält Elemente, sogenannte *Vektoren*, die sich addieren und mit Elementen des Körpers vervielfachen lassen.

Definition Vektorraum Eine Menge V ist ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} , wenn

- es eine *Addition* $V \times V \rightarrow V: (x, y) \mapsto x + y$ gibt, sodass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist;
- es eine *skalare Multiplikation* $\mathbb{K} \times V: (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ gibt mit den Eigenschaften
 - $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
 - $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
 - $(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$,
 - $1x = x$
 für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$.

Die Anforderungen an die skalare Multiplikation stellen dabei nur sicher, dass die skalare Multiplikation im Vektorraum und die Multiplikation innerhalb des Körpers zueinander kompatibel sind. Die Untersuchung von Vektorräumen ist Gegenstand der *linearen Algebra*. Wichtige Ergebnisse sind:

Existenz einer Basis Es gibt Vektoren $\{b_1, b_2, \dots\} \subset V$, sodass sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als (endliche) Linearkombination $\sum_i \lambda_i b_i$ schreiben lässt.

Dimension eines Vektorraumes Alle Basen eines Vektorraumes sind gleich mächtig, d. h., zwischen beliebigen zwei Basen B_1 und B_2 eines Vektorraumes V gibt es eine bijektive (d. h. umkehrbare) Abbildung $B_1 \rightarrow B_2$. Besteht eine Basis eines Vektorraumes V nur aus endlich vielen Elementen, dann haben alle Basen von V die gleiche Länge. Diese Länge bezeichnet man als *Dimension* von V .

Koordinaten eines Vektors Ist $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ eine Basis des n -dimensionalen Vektorraumes V , kann man jeden Vektor $v \in V$ eindeutig schreiben als $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$. Das n -Tupel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nennt man die *Koordinaten* von v bezüglich der Basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ und notiert diese als Spaltenvektoren. Um Platz zu sparen, werden in diesem Buch die Koordinatenvektoren auch als transponierte Zeilenvektoren $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ notiert.



Die Koordinaten eines Vektors hängen von der Wahl der Basis ab. So hat z. B. das Polynom $f(X) = 1 + 2X + 3X^2$ bezüglich der Basis $\{1, X, X^2\}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und bezüglich der Basis $\{1, 1 + X, 1 + X + X^2\}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Literatur

- Jänich, K.: Lineare Algebra. 10. Aufl., Springer (2004)
- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., SpringerSpektrum (2014)

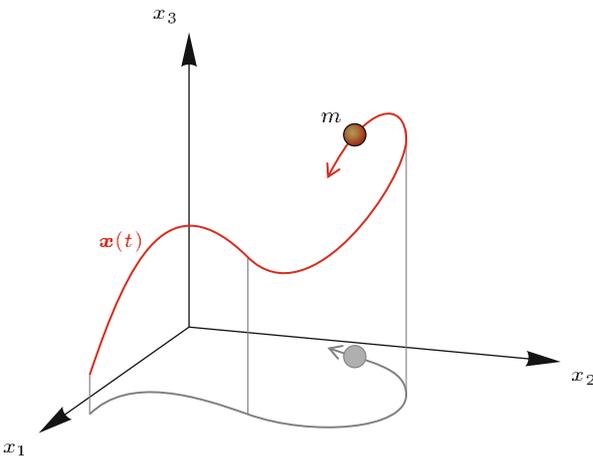


Abb. 1.1 Die Bahnkurve $\mathbf{x}(t)$ einer Punktmasse m (hier zusammen mit ihrer Projektion auf die x_1 - x_2 -Ebene dargestellt) umfasst die zusammenhängende Menge aller Punkte, die m im Laufe der Zeit durchläuft

Im gesamten Buch werden Vektoren im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 fett gedruckt. In der Regel werden Vektoren als Spaltenvektoren dargestellt, z. B.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Die entsprechenden Zeilenvektoren nennt man transponiert. Sie werden in der Form $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ geschrieben. Eine mathematische Einführung in Vektorräume und die Darstellung eines Vektors in einem Koordinatensystem finden Sie im „Mathematischen Hintergrund“ 1.1.

Vektorräume spielen in der Physik eine zentrale Rolle. Mit ihrer Hilfe lassen sich alle Größen beschreiben, deren Linearkombinationen wieder einen Vektor ergeben. Man begegnet Vektoren über die Mechanik hinaus in praktisch allen physikalischen Disziplinen. In Aufgabe 1.1 wird die Vektorrechnung vertieft.

Die *Bahnkurve* $\mathbf{x}(t)$ einer Punktmasse ist die zentrale Größe in der Mechanik von Punktmassen. Sie gibt an, wie sich ihre Koordinaten im gewählten Bezugssystem mit der Zeit t ändern. Die Bahnkurve enthält alle Raumpunkte, welche die Punktmasse im Laufe der Zeit durchläuft. Dies ist in Abb. 1.1 dargestellt. In Kap. 2 werden wir detailliert untersuchen, wie die Koordinaten einer Punktmasse von der Wahl des Koordinatensystems abhängen und wie man zwischen verschiedenen Koordinatensystemen transformieren kann.

Unter der *Geschwindigkeit* einer Punktmasse versteht man die Änderung ihres Ortes mit der Zeit. Hierzu vergleicht man die Position der Punktmasse zu verschiedenen Zeiten t und $t + \Delta t$ und betrachtet den Grenzwert

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Dies ist die *Zeitableitung* (siehe auch „Mathematischer Hintergrund“ 1.7). Die Geschwindigkeit einer Punktmasse ist dann definiert als

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} =: \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (1.3)$$

Generell bezeichnet ein Punkt über einem Funktionssymbol die Zeitableitung dieser Funktion. Die Anzahl der Punkte gibt die Ordnung der Zeitableitung an: Ein Punkt steht für die erste Ableitung, zwei Punkte für die zweite usw.

Die Ableitung einer vektorwertigen Funktion wird berechnet, indem die Ableitung jeder einzelnen Komponente bestimmt wird, z. B.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Achtung Streng genommen gilt diese Definition der Geschwindigkeit (1.3) nur in nicht rotierenden kartesischen Koordinatensystemen, da man zwischen einem Vektor und seiner Darstellung in einem Koordinatensystem unterscheiden muss. Um der Übersicht in diesem Kapitel Vorrang vor Vollständigkeit zu geben, werden die entsprechenden Verallgemeinerungen erst in Kap. 2 diskutiert. ◀

Die *Beschleunigung* einer Punktmasse schließlich ist die Änderung ihrer Geschwindigkeit mit der Zeit,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} =: \ddot{\mathbf{x}}(t), \quad (1.5)$$

und somit die zweite Zeitableitung des Ortes.

Das klassische Relativitätsprinzip

Das *Relativitätsprinzip* besagt, dass zwei mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme äquivalent sind, d. h., keines dieser beiden Systeme ist irgendwie vor dem anderen ausgezeichnet. Durch eine Messung lässt sich folglich nicht entscheiden, ob ein gegebenes System ruht oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Nur die relative Geschwindigkeit zweier Systeme ist messbar.