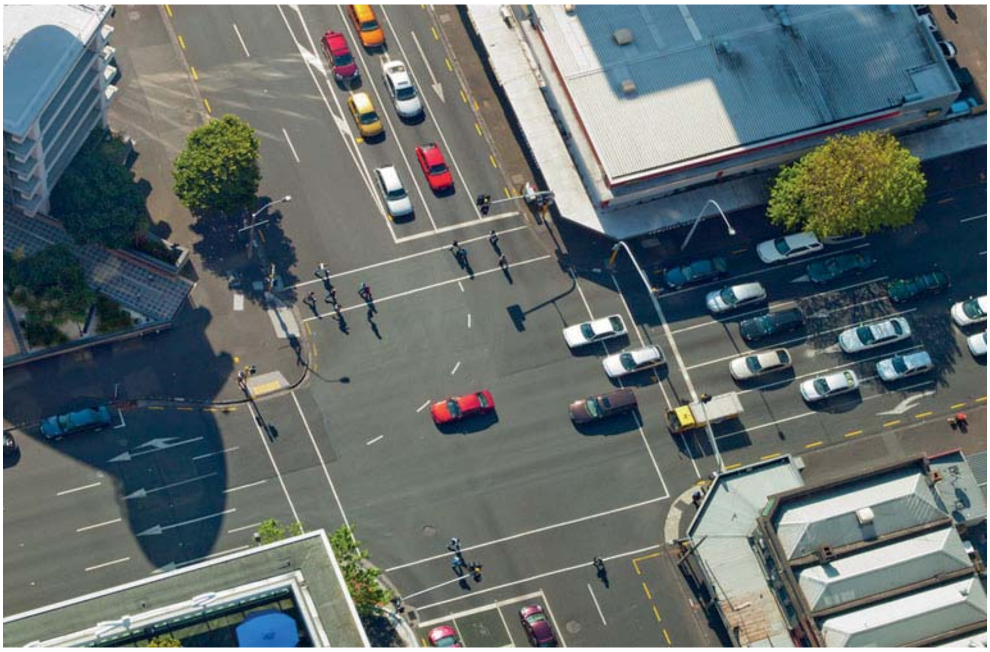
Mechanik von Massepunkten 2

Peter Kersten, Jenny Wagner, Paul A. Tipler und Gene Mosca



Wenn ein Auto von seinem Ausgangspunkt zu seinem Zielort fährt, beschleunigt es beim Anfahren, bewegt sich eine Zeit lang mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden Vorfahrtsstraße, biegt rechts oder links ab, bremst an einer roten Ampel und fährt gegebenenfalls rückwärts. *(© Creative-Nature_nl/Getty Images/iStock.)*

? Wie kann der Fahrer seine Ankunftszeit abschätzen? (Siehe Beispiel 2.3.)

Die Grundmerkmale jeder Bewegung, die Verschiebung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung, spielen in der Physik eine ganz wichtige Rolle. Tatsächlich war das Bestreben, die Bewegung von Körpern zu beschreiben, vor mehr als 400 Jahren die Geburtsstunde der Physik.

Die Bewegung und die damit zusammenhängenden Konzepte der Kraft und der Masse bilden den Gegenstand der Mechanik. Im Rahmen der Mechanik werden wir uns zunächst der Kinematik zuwenden, die sich mit der Charakterisierung der Bewegung beschäftigt. Die Kinematik ist eine wesentliche Grundlage für das Verständnis des vorliegenden Buchs. Die Bewegung zieht sich durch die gesamte Physik. Die Kinematik bildet die Grundlage, um zu verstehen, in welcher Weise die Bewegung durch Kräfte und Massen beeinflusst wird. Ab Kap. 3 werden wir uns dann der Dynamik zuwenden, die sich mit Bewegung, Kraft und Masse beschäftigt.

P. Kersten, J. Wagner (Hrsg.), *Physik*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-58281-7_2

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Kinematik einfacher Bewegungen beschäftigen. In diesem Zusammenhang werden wir die exakten Definitionen von Begriffen wie Verschiebung, Geschwindigkeit, Geschwindigkeitsbetrag und Beschleunigung einführen, die umgangssprachlich zur Beschreibung von Bewegungen herangezogen werden. Insbesondere werden wir den wichtigen Spezialfall der gleichförmig beschleunigten Bewegung betrachten und als Anwendungen den schrägen Wurf und die Kreisbewegung näher untersuchen.

2.1 Verschiebung

Beim Pferderennen gilt das Pferd als Sieger, dessen Nase zuerst die Ziellinie überschreitet. Das legt die Vorstellung nahe, dass es bei dem gesamten Rennen nur auf die Bewegung dieses einen Punkts des Pferds ankommt, während Größe, Gestalt und Bewegung des restlichen Pferds keine Rolle spielen. Es zeigt sich, dass diese Vereinfachung in der Physik auch beim Studium der Bewegung anderer Körper nützlich ist. Häufig lässt sich die Bewegung eines Körpers anhand der Bewegung eines einzigen Punkts dieses Körpers beschreiben. Stellen Sie sich ein Auto vor, das auf einer geraden Straße fährt. Sie können dann seine Bewegung dadurch beschreiben, dass Sie die Bewegung eines einzelnen Punkts auf einer Seite des Autos betrachten. Ein Körper, der idealisiert auf diese Weise dargestellt werden kann, wird **Massenpunkt** oder auch **Teilchen** genannt. In der Mechanik kann jeder **Körper** als Massenpunkt betrachtet werden, solange man sich nicht für seine Größe, Form oder innere Bewegung interessiert. Somit können Autos, Eisenbahnzüge und Raketen unabhängig von ihrer Größe als Massenpunkt gelten. Selbst die Erde und die anderen Planeten auf ihrem Weg um die Sonne, aber auch Menschen oder Galaxien können als Massenpunkt bzw. Teilchen angesehen werden.

Ort und Verschiebung

Um die Bewegung eines Teilchens beschreiben zu können, müssen wir seinen **Ort** angeben und charakterisieren können, wie er sich ändert. Bei der eindimensionalen Bewegung wird oft die x-Achse als diejenige Linie gewählt, entlang derer sich das Teilchen bewegt. Abb. 2.1 zeigt einen Fahrradfahrer zum Zeitpunkt t_A am Ort x_A. Zu einem späteren Zeitpunkt t_E ist er beim Ort x_E. Die Ortsänderung des Fahrradfahrers $x_E - x_A$ wird **Verschiebung** genannt. Änderungen wollen wir mit dem griechischen Buchstaben Δ (großes Delta) bezeichnen. Somit kann die Änderung von x als Δx geschrieben werden:

Definition der Ortsverschiebung

$$\Delta x = x_E - x_A \tag{2.1}$$

In diesem Fall kann auf die Vektorschreibweise verzichtet werden; es genügt ein Plus- oder Minuszeichen zur Charakterisierung der Richtung.

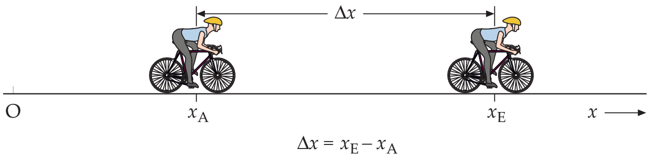


Abb. 2.1 Ein Fahrradfahrer fährt auf einer geraden Straße. Eine Koordinatenachse besteht aus einer Linie entlang des Wegs, auf dem der Radfahrer fährt. Ein Punkt entlang dieser Geraden ist als Ursprung 0 gewählt. Anderen Punkten auf der Geraden ist eine Zahl x zugeordnet, deren Wert proportional zu ihrem Abstand vom Koordinatenursprung ist. Punkte rechts vom Koordinatenursprung sind positiv, Punkte links von ihm negativ. Wenn das Fahrrad vom Punkt x_A zum Punkt x_E fährt, ist seine Verschiebung $\Delta x = x_E - x_A$

Tipp: Die Schreibweise Δx (gesprochen „Delta x") bezeichnet eine Größe, die die Änderung von x ist. „Δx" ist genauso wenig das Produkt von Δ und x wie $\cos\theta$ das Produkt von $\cos$ und θ ist. Vereinbarungsgemäß ist die Änderung einer Größe stets ihr Endwert minus ihrem Anfangswert. ◀

Es ist wichtig, sich den Unterschied zwischen Verschiebung und zurückgelegter Strecke vor Augen zu halten. Die zurückgelegte Strecke ist die Länge des Wegs, den ein Teilchen vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt zurücklegt. Die Strecke ist eine skalare Größe und immer eine positive Zahl. Die Verschiebung ist dagegen die **Ortsänderung** des Teilchens. Wenn sich der Ort in Richtung von zunehmendem x (in der $+x$-Richtung) ändert, ist sie positiv, während sie negativ ist, wenn er sich in $-x$-Richtung ändert. In zwei oder mehr Dimensionen muss man den Ort und die Verschiebung eines Teilchens mithilfe von Vektoren angeben.

Der **Ortsvektor** eines Teilchens ist ein Vektor vom Ursprung des Koordinatensystems zum Ort des Teilchens.

Definition des Ortsvektors

Ein Teilchen in der x-y-Ebene mit den Koordinaten (x, y) besitzt den Ortsvektor

$$\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}}\,. \tag{2.2}$$

Dabei sind die x- und die y-Komponente die kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{r}$ des Teilchens (Abb. 2.2).

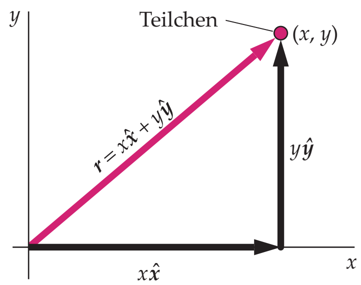


Abb. 2.2 Die x- und die y-Komponente des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ für ein Teilchen sind seine kartesischen Koordinaten

Springer
https://www.springer.com/978-3-662-58280-0
Physik - für Studierende der Naturwissenschaften und Technik
P. Kersten, J. Wagner (Hrsg.), Tipler/Mosca
2019, XXXII, 1468 S., 156 schwarz-weiß Abbildungen, 1494 Abbildungen in Farbe, Hardcover
ISBN: 978-3-662-58280-0

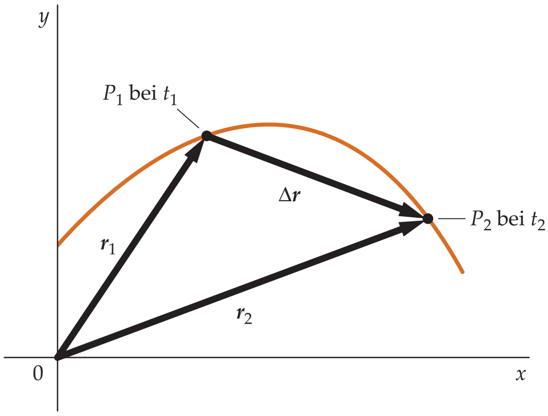


Abb. 2.3 Der Verschiebungsvektor $\Delta\boldsymbol{r}$ ist die Differenz der Ortsvektoren $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Mit anderen Worten, $\Delta\boldsymbol{r}$ ist derjenige Vektor, der bei Addition zum Anfangsortsvektor $\boldsymbol{r}_1$ den Endortsvektor $\boldsymbol{r}_2$ ergibt. Damit ist $\boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2$

Abb. 2.3 zeigt die auch als Trajektorie bezeichnete Bahnkurve eines Teilchens. Zum Zeitpunkt t_1 ist das Teilchen am Ort P_1, wobei es den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_1$ besitzt. Zum Zeitpunkt t_2 hat sich das Teilchen zum Ort P_2 bewegt, wobei es den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_2$ besitzt.

Definition des Verschiebungsvektors

Die Ortsänderung eines Teilchens wird mit dem Verschiebungsvektor $\Delta\boldsymbol{r}$ angegeben:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{2.3}$$

Unter Verwendung von Einheitsvektoren kann die Verschiebung auch als

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\widehat{\boldsymbol{x}} + (y_2 - y_1)\,\widehat{\boldsymbol{y}} = \Delta x\,\widehat{\boldsymbol{x}} + \Delta y\,\widehat{\boldsymbol{y}} \tag{2.4}$$

geschrieben werden.

Beispiel 2.1 verdeutlicht den Unterschied zwischen Strecke und Verschiebung.

Beispiel 2.1: Strecke, Verschiebung und Verschiebungsvektor am Beispiel eines laufenden Hunds

Stellen Sie sich vor, Sie spielen Fangen mit einem Hund. Zunächst steht der Hund bei Fuß. Anschließend läuft er 20 m in positive y-Richtung, um einen Stock zu apportieren, den Sie ihm hingeworfen haben. Nachdem der Hund den Stock aufgenommen hat, läuft er 15 m in positive x-Richtung und legt sich auf den Boden, um an dem Stock zu kauen. Als Sie ihn rufen, um wieder nach Hause zu gehen, läuft er direkt auf Sie zu und bringt Ihnen den Stock zurück. a) Welche Gesamtstrecke hat der Hund zurückgelegt? b) Wie groß ist die Gesamtverschiebung, die der Hund gelaufen ist? c) Zeigen Sie, dass die Gesamtverschiebung die Vektorsumme der aufeinanderfolgenden Verschiebungsvektoren auf seinem Weg ist.

Problembeschreibung: Die Gesamtstrecke l ist die Summe der einzelnen Strecken, die der Hund nacheinander zurücklegt. Die Komponenten des Verschiebungsvektors berechnet man als Differenz der Koordinaten des Endpunkts und des Anfangspunkts der Bewegung. Der Hund läuft zum Zeitpunkt 0 los, nimmt den Stock zum Zeitpunkt 1 auf, legt ihn zum Zeitpunkt 2 ab und gibt ihn Ihnen zum Zeitpunkt 3 wieder zurück.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Diagramm der Bewegung (Abb. 2.4). Zeichnen Sie dabei auch die Koordinatenachsen ein und wählen Sie einen geeigneten Ursprung des Koordinatensystems.

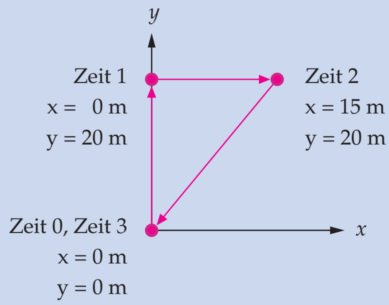


Abb. 2.4 Die roten Punkte bezeichnen den Ort des Hunds zu verschiedenen Zeitpunkten

2. Berechnen Sie die zurückgelegte Gesamtstrecke. Benutzen Sie dabei den Satz des Pythagoras, um die dritte Teilstrecke auszurechnen:

$$\begin{aligned} s_{03} &= s_{01} + s_{12} + s_{23} = s_{01} + s_{12} + \sqrt{s_{01}^2 + s_{12}^2} \\ &= 20\,\mathrm{m} + 15\,\mathrm{m} + \sqrt{(20\,\mathrm{m})^2 + (15\,\mathrm{m})^2} = \boxed{60\,\mathrm{m}} \end{aligned}$$

(Die Indizes bezeichnen die Zeitintervalle, z. B. ist s_{01} die zwischen den Zeitpunkten 0 und 1 zurückgelegte Strecke.)

Teilaufgabe b

Da der Hund am Ende seiner Bewegung wieder bei Ihnen, also an seinem Startpunkt, steht, hat er eine Gesamtverschiebung von 0 im Zeitintervall zwischen Zeitpunkt 0 und Zeitpunkt 3: $\Delta\boldsymbol{r}_{03} = \boxed{0\,\mathrm{m}}$.

https://www.springer.com/978-3-662-58280-0
Physik - für Studierende der Naturwissenschaften und Technik
P. Kersten, J. Wagner (Hrsg.), Tipler/Mosca
2019, XXXII, 1468 S., 156 schwarz-weiß Abbildungen, 1494 Abbildungen in Farbe, Hardcover
ISBN: 978-3-662-58280-0

Teilaufgabe c
Alternativ ergibt sich die Gesamtverschiebung als Vektorsumme der Verschiebungen der drei Teilabschnitte der Bewegung:

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{r}_{01} &= (x_1 - x_0)\,\widehat{\boldsymbol{x}} + (y_1 - y_0)\,\widehat{\boldsymbol{y}} \\
&= (0\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{x}} + (20\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{y}} = (20\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{y}} \\
\Delta \boldsymbol{r}_{12} &= (x_2 - x_1)\,\widehat{\boldsymbol{x}} + (y_2 - y_1)\,\widehat{\boldsymbol{y}} \\
&= (15\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{x}} + (20\,\mathrm{m} - 20\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{y}} = (15\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{x}} \\
\Delta \boldsymbol{r}_{23} &= (x_3 - x_2)\,\widehat{\boldsymbol{x}} + (y_3 - y_2)\,\widehat{\boldsymbol{y}} \\
&= (0\,\mathrm{m} - 15\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{x}} + (0\,\mathrm{m} - 20\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{y}} \\
&= -(15\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{x}} - (20\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{y}} \\
\Delta \boldsymbol{r}_{03} &= \Delta \boldsymbol{r}_{01} + \Delta \boldsymbol{r}_{12} + \Delta \boldsymbol{r}_{23} \\
&= (20\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{y}} + (15\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{x}} - (15\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{x}} - (20\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{y}} \\
&= \boxed{(0\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{x}} + (0\,\mathrm{m})\,\widehat{\boldsymbol{y}}}
\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die beiden Ergebnisse aus Teilaufgabe b und Teilaufgabe c stimmen miteinander überein.

Weitergedacht: Die zurückgelegte Gesamtstrecke ist stets gleich der Summe der auf den einzelnen Teilstücken zurückgelegten Strecken. Die Gesamtverschiebung ist immer die Vektorsumme der Verschiebungsvektoren auf den einzelnen Teilstücken.

2.2 Geschwindigkeit

Oft interessiert man sich nicht nur für die Verschiebung eines Körpers von einem Ort zu einem anderen, sondern man möchte auch wissen, innerhalb welcher Zeit diese Strecke zurückgelegt wird. Dazu definiert man die **Geschwindigkeit** eines Objekts als den Quotienten aus der Verschiebung $\Delta \boldsymbol{r}$ und der Zeit, die es zum Zurücklegen dieser Strecke benötigt:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{2.5}$$

Die Verschiebung $\Delta \boldsymbol{r}$ ist im Allgemeinen ein Vektor, zu dem die Geschwindigkeit proportional ist. Daher ist die Geschwindigkeit ebenfalls ein Vektor und zeigt in dieselbe Richtung wie der Verschiebungsvektor. Besteht eine Verschiebung aus mehreren Teilverschiebungen, muss man die Verschiebungsvektoren der einzelnen Teile mithilfe der Vektoraddition summieren. Der resultierende Vektor zeigt dann in die Richtung der Gesamtverschiebung, zu der auch der Geschwindigkeitsvektor parallel ist.

Definition der eindimensionalen Geschwindigkeit

Für den einfachen Fall, dass sich ein Körper geradlinig, z. B. in x-Richtung, bewegt, benötigt man keine Vektorschreibweise und Gl. 2.5 vereinfacht sich zu:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.6}$$

Interessiert man sich nicht für die Richtung der Bewegung, betrachtet man nur den **Geschwindigkeitsbetrag** eines Teilchens. Er ist der Quotient aus der Gesamtstrecke, die das Teilchen zurücklegt, und der Gesamtzeit vom Anfang bis zum Ende. Da sowohl die Gesamtstrecke als auch die Gesamtzeit immer positiv sind, ist der Geschwindigkeitsbetrag ebenfalls immer positiv. Besteht die Verschiebung aus mehreren Teilstücken in verschiedene Richtungen, ergibt sich die Gesamtstrecke als Summe der Beträge der Vektoren der Teilstücke.

Tipp: Die Kinematik ist ein Teilgebiet der Mechanik und beschreibt die Bewegung von Körpern im Raum. Alle physikalischen Größen der Kinematik können mit den Dimensionen Länge (L) und Zeit (T) dargestellt werden. Entsprechend werden die SI-Einheiten Meter (m) und Sekunde (s) verwendet. ◀

Analog zur grafischen Darstellung von Verschiebungen in einem Koordinatensystem mit x-, y- und z-Achsen kann man sich die Geschwindigkeit mithilfe eines sogenannten **Weg-Zeit-Diagramms** veranschaulichen. Abb. 2.5 zeigt ein solches Diagramm für eine eindimensionale Bewegung entlang der x-Achse. Jeder Punkt auf der Kurve beschreibt, an welchem Ort x sich der bewegte Körper zur Zeit t aufhält. Bewegt sich ein Körper vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 entlang der blau eingezeichneten Geraden, so muss die Funktion $x(t)$ die Geradengleichung $x(t) = m \cdot (t - t_0) + x_0$ erfüllen, wobei m die Steigung der Geraden und (x_0, t_0) der Startpunkt der Bewegung am Ort x_0 zum Zeitpunkt t_0 ist. Meist setzt man hierfür den Ort x_0 ein, an dem sich der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet. Die Steigung der Geraden ergibt sich, wie in Abb. 2.5 gezeigt, als Quotient aus der Verschiebung $\Delta x = x_2 - x_1$ und dem dafür benötigten Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$. Diesen Quotienten haben wir in Gl. 2.6 bereits als die Geschwindigkeit der eindimensionalen Bewegung definiert. Daraus ergibt sich die Abhängigkeit des Ortes von der Zeit.

Ort in Abhängigkeit der Zeit

$$x(t) = v_x \cdot (t - t_0) + x_0 \tag{2.7}$$

Dabei ist x_0 der Ort zum Zeitpunkt t_0.

Ist die Geschwindigkeit v für jeden Zeitpunkt t dieselbe, wie in Gl. 2.7, bezeichnet man diese Bewegung auch als **gleichförmige** Bewegung, d. h. eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Für den Fall, dass sich der Körper in Abb. 2.5 gleichförmig von P_1 zu P_2' bewegt, ergibt sich eine höhere Geschwindigkeit, da die Steigung dieser Geraden höher ist als die Steigung der Geraden, die P_1 und P_2 miteinander verbindet.

Bewegt sich der Körper nicht entlang einer der blauen Geraden, sondern gemäß der eingezeichneten Kurve von P_1 über P_2'

Springer
https://www.springer.com/978-3-662-58280-0
Physik - für Studierende der Naturwissenschaften und Technik
P. Kersten, J. Wagner (Hrsg.), Tipler/Mosca
2019, XXXII, 1468 S., 156 schwarz-weiß Abbildungen, 1494 Abbildungen in Farbe, Hardcover
ISBN: 978-3-662-58280-0